1 Apêndice

Cálculo do campo elétrico gerado por duas cargas, q e -q a uma distância entre elas de 2a:

-Campo gerado pela carga -q, localizada em x= -a, num ponto P qualquer:

$$\vec{E} = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r} - \vec{r'}}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} \tag{1}$$

$$\vec{r'} = -a\hat{i} \tag{2}$$

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} \tag{3}$$

$$\Rightarrow \vec{r} - \vec{r'} = (x+a)\hat{i} + y\hat{j} \tag{4}$$

$$\Rightarrow |\vec{r} - \vec{r'}| = ((x+a)^2 + y^2)^{1/2} \tag{5}$$

Substituindo na expressão (1):

$$\vec{E} = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0}\frac{(x+a)\hat{i} + y\hat{j}}{((x+a)^2 + y^2)^{3/2}}. \tag{6}$$

Analogamente para a carga +q, localizada em x= a, temos que:

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{(x-a)\hat{i} + y\hat{j}}{((x-a)^2 + y^2)^{3/2}} \tag{7}$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{total} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}[(\frac{x-a}{((x-a)^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{(x+a)}{((x+a)^2 + y^2)^{3/2}})\hat{i} + (\frac{y}{((x-a)^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{y}{((x+a)^2 + y^2)^{3/2}})\hat{j}] \tag{8}$$

Renomeando as variáveis $\frac{x+a}{y} = u$ e $\frac{x-a}{y} = v$, temos:

$$E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 y^2}[\frac{v}{(v+1)^{3/2}} - \frac{u}{(u+1)^{3/2}}] \tag{9}$$

$$E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 y^2}[\frac{1}{(v+1)^{3/2}} - \frac{1}{(u+1)^{3/2}}] \tag{10}$$

$$\Rightarrow \frac{E_y}{E_x} = \frac{(u^2+1)^{3/2} - (v^2+1)^{3/2}}{v(u^2+1)^{3/2} - u(v^2+1)^{3/2}} \tag{11}$$

Como x=uy-a e x=vy+a, temos:

$$dx = duy + udy \tag{12}$$

$$dx = ydv + vdy \tag{13}$$

$$\Rightarrow ydu - ydv + udy - vdy = 0 \tag{14}$$

$$\Rightarrow y(du - dv) = dy(v - u) \tag{15}$$

$$\Rightarrow dy = \frac{2a(dv-du)}{(u-v)^2} \tag{16}$$

$$dx = 2a\frac{udv-vdu}{(u-v)^2} \tag{17}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dv-du}{udv-vdu} \tag{18}$$

Após uma certa álgebra, chegamos ao resultado:

$$\int \frac{dv}{(v+1)^{3/2}} = \int \frac{du}{(u^2+1)^{3/2}} \tag{19}$$

fazendo uma mudança nas variáveis, a saber: $v^2+1=t$ e $u^2+1=s$

$$\frac{v}{(v^2+1)^{1/2}} = \frac{u}{(u^2+1)^{1/2}} + C \tag{20}$$

$$\therefore \frac{x+a}{((x+a)^2+y^2)^{1/2}} - \frac{x-a}{((x-a)^2+y^2)^{1/2}} = C \tag{21}$$

Esta equação nos diz que as linhas de campo elétrico são elípticas como é demonstrado experimentalmente.